Matemática

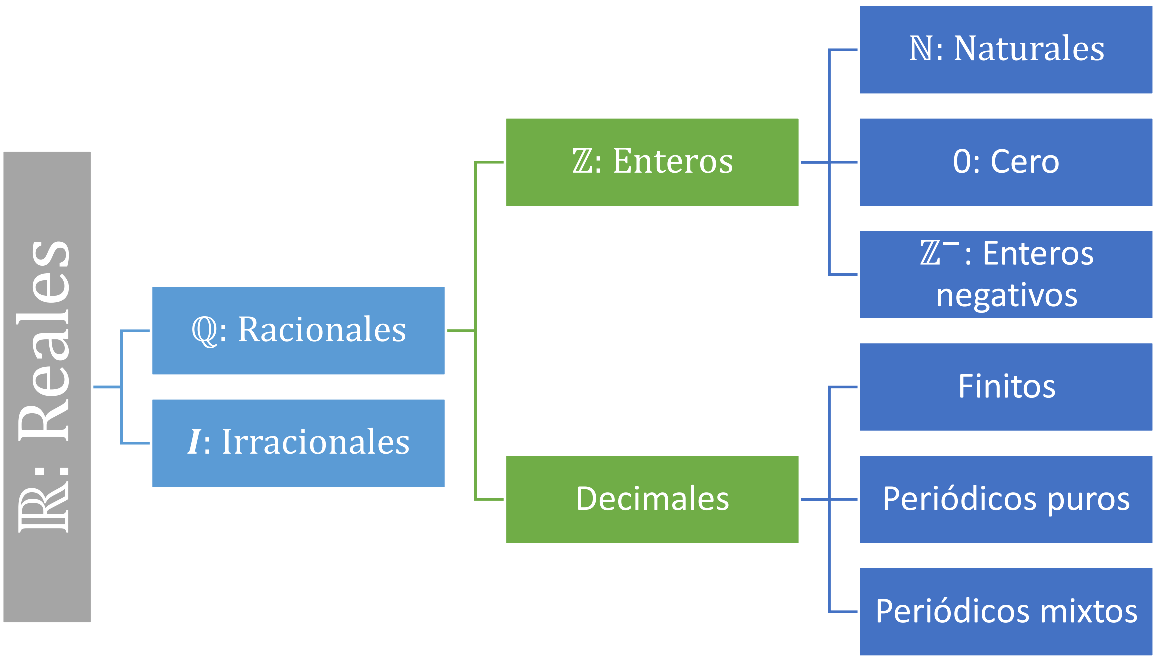
Seminario de Ingreso
Tecnicatura Universitaria
en Programación

Contenido

UNIDAD N° 1: CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL ÁLGEBRA

Conjuntos numéricos

Los matemáticos reconocen varios conjuntos de números que comparten ciertas características. Estas categorías son útiles cuando ciertos tipos de números son válidos para valores y variables. Nuestro entendimiento y clasificación de los diferentes conjuntos de números se ha desarrollado durante miles de años.



Números Naturales

Los números naturales son los que desde el principio de los tiempos se han utilizado para contar. En la mayoría de los países han adoptado los números arábigos, llamados así porque fueron los árabes quienes los introdujeron en Europa, pero fue en la India donde se inventaron. El conjunto de los números naturales se denota como N y se representan así:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6, \ldots\}$$

Los números naturales se caracterizan por dos propiedades:

- El número 1 es el primer número natural y cada número natural se forma sumándole 1 al anterior.
- Cuando restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no es necesariamente un número natural, y por eso decimos que los números naturales no son cerrados respecto estas dos operaciones. En cambio, sí son cerrados respecto a la suma y la

multiplicación, es decir, la suma o multiplicación de dos números naturales da siempre como resultado otro número natural.

Los números naturales a su vez se pueden clasificar en números primos y compuestos. Se dice que un número es primo cuando sus únicos divisores son él mismo y la unidad. Por ejemplo 5, 7 y 23 son primos. El número 18, en cambio, es compuesto, ya que tiene más divisores (1, 2, 3, 6, 9 y 18). Se puede hacer una lista de números primos con la llamada Criba de Eratóstenes, que consiste en tachar todos los múltiplos de 2 (ya que serán compuestos al ser el 2 un divisor). Después tachamos todos los múltiplos de 3 (por lo mismo). El 4 estará tachado, así que lo saltamos. El 5 está sin tachar, así que tachamos todos los múltiplos de 5. Continuamos este proceso, tachando los múltiplos de los números que no estén tachados. Los números que "sobreviven" a esta criba son los números primos. Los primeros son:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 …

Para saber si un número es primo, lo vamos dividiendo por 2, 3, 5… hasta que encontremos una división exacta, en cuyo caso el número sería compuesto, o bien hasta que el cociente de la división sea menor que el divisor. Si hemos llegado a este punto sin encontrar ninguna división exacta, el número dado es primo.

Máximo común divisor

El Máximo Común Divisor es, como su nombre indica, el mayor de los divisores comunes de varios números. Para calcularlo, se descompone cada uno de ellos en factores primos. El MCD es el resultado de multiplicar los factores que se repitan en todas las descomposiciones, afectados por el menor exponente.

En el caso de que no se repita ningún factor, el MCD de esos números es 1, y se dice que los números son "primos entre sí". Por ejemplo, el 18 y el 25 son primos entre sí. Por ejemplo, si queremos hallar el MCD de 36, 60 y 72, descomponemos los tres en factores primos:

$$36 = 2^2 * 3^2$$

$$60 = 2^2 * 3 * 5$$

$$72 = 2^2 * 3^2$$

Vemos que los únicos factores que se repiten en las tres descomposiciones son el 2 y el 3. Los escogemos con los menores exponentes al que están afectados, por lo que:

$$M.C.D.(36{,}60{,}72) = 2^2 * 3^2 = 12$$

Mínimo común múltiplo

El Mínimo Común Múltiplo es, así mismo, el menor de los múltiplos comunes a varios números. Para calcularlo, descomponemos los números en factores primos, y el MCM es el resultado de multiplicar los factores comunes y los no comunes, afectados por el mayor exponente. Si los números son primos entre sí, el MCM es el producto entre ellos.

Por ejemplo, el MCM de 36, 60 y 72, que ya tenemos descompuestos más arriba. Los factores que se repiten son el 2 y el 3, y los que no se repiten, el 5. Los escogemos con los mayores exponentes, es decir, 23, 32 y 5. El MCM es, por lo tanto:

$$M.C.D.(36,60,72) = 2^2 * 3^2 * 5 = 360$$

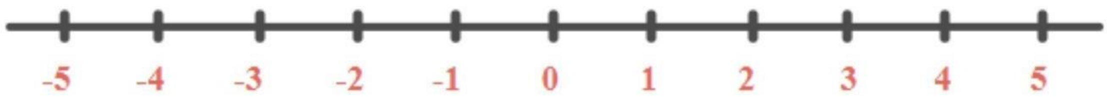
Números Enteros

Cuando aparece la necesidad de distinguir unos valores de otros a partir de una posición de referencia es cuando aparecen los números negativos. Por ejemplo, cuando desde el nivel 0 (nivel del mar) queremos diferenciar por encima del nivel del mar o por debajo del mar (en las profundidades). O en el caso de las temperaturas, positivas o bajo cero. Así podemos estar a 700 metros de altitud (+700), o bucear a 10 metros de profundidad (-10), y podemos estar a 25 grados Celsius (+25) o a 5 grados bajo 0 (-5).

Para denotar los números negativos añadimos un signo menos delante del número. En definitiva, al conjunto formado por los enteros negativos, el número cero y los enteros positivos (o naturales) lo llamamos conjunto de los números enteros. Se denota con el símbolo Z y se pueden escribir como:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, 3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Los representamos en una recta numérica de la siguiente manera:



Una propiedad importante de los números enteros es que son cerrados respecto a las operaciones de adición, multiplicación y sustracción, es decir, la suma, la resta y la multiplicación de dos números enteros da otro número entero. Nótese que el cociente de dos enteros, por ejemplo 3 y 7, no necesariamente es un entero. Así, la operación división no es cerrada respecto a los números enteros.

Números Racionales

Los números racionales son los números que resultan de la razón (división) entre dos números enteros. Se denota el conjunto de los números racionales como Q, así que:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

El resultado de un número racional puede ser un entero o bien un decimal, ya sea positivo o negativo:

$$-\frac{8}{4} = -2 \ entero$$

$$\frac{6}{5} = 1{,}2 \ decimal$$

Además, entre los decimales puede ser de dos tipos, con un número limitado de cifras que llamaremos decimal finito o bien con un número ilimitado de cifras, que llamaremos decimal periódico:

$$\frac{88}{25} = 3{,}52 \ finito$$

$$\frac{5}{9} = 0{,}555555 \ldots = 0,\widehat{5} \ pedi\acute{o}dico$$

Se llaman periódicos porque en la parte decimal hay una o más cifras que se repiten. Si justo los números que se repiten comienzan a las décimas, los llamamos periódicos puros mientras que en caso contrario los llamamos periódicos mixtos:

$$6{,}888888 = 6,\widehat{8} \ puro$$

$$3{,}4156262 = 3{,}415\widehat{62} \ mixto$$

Obsérvese que todo entero es un número racional, ya que:

$$5 = \frac{5}{1}$$

Los números racionales son cerrados no sólo respecto de las operaciones de adición, multiplicación y sustracción, sino también de la división (excepto por 0).

Números Irracionales

Hemos visto que cualquier número racional se puede expresar como un número entero, un decimal exacto o un decimal periódico.

Ahora bien, no todos los números decimales son exactos o periódicos, por lo tanto, no todos los números decimales pueden ser expresados como una fracción de dos enteros.

Estos números decimales que no son exactos ni periódicos se caracterizan por tener infinitas cifras decimales no periódicas, es decir, que no se acaban nunca y no tienen un patrón de repetición, se los llama números irracionales y se los denota I. Obsérvese que el conjunto de números irracionales es el complementario del conjunto de números racionales.

Algunos ejemplos de números irracionales son:

$$\sqrt{2}\ ;\ \pi\ ,\sqrt[3]{5}$$

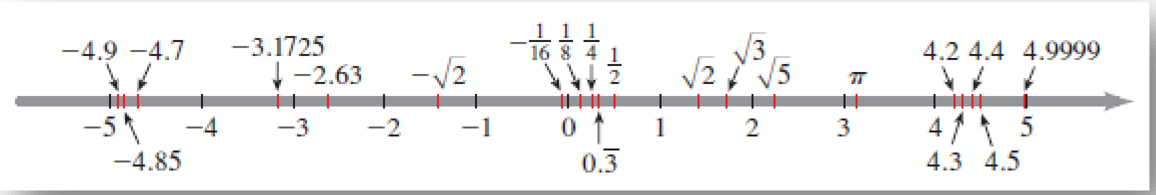
donde por ejemplo π proviene de la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Números Reales

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se denomina conjunto de los números reales y se denota como R.

Una de las propiedades más importantes de los números reales es poderlos representar por puntos en una línea recta. Se elige un punto llamado origen, para representar el 0, y otro punto, comúnmente a la derecha, para representar el 1.

Resulta así de manera natural una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, es decir, que cada punto de la recta representa un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Llamamos a esta recta la recta real. En la siguiente imagen se puede ver un ejemplo:



1.1. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Suma, resta y producto

Sobre el conjunto R se definen dos operaciones elementales: la suma (+) y la multiplicación o producto (·). La suma y el producto de dos números reales es un número real. Además, se verifican las siguientes propiedades:

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

Elemento neutro

$a + 0 = a \quad neutro\ adivitivo$

$a * 1 = a \quad neutro\ multiplicativo$

Elemento opuesto

$a + (-a) = 0$

Elemento inverso

$$a * \frac{1}{a} = 1$$

Si bien definimos solo la suma y la multiplicación de dos números reales, también podemos hablar de resta (−) y división o cociente (:). La resta no es otra cosa que sumar el opuesto de un número. De forma similar, lo que se conoce como división es la multiplicación por un inverso.

$$5 - 3 = 5 + (-3) \quad y \quad 5:3 = 5 * \frac{1}{3}$$

El cero

La historia del cero no es sencilla. Parece una tontería, pero los antiguos griegos y romanos, célebres ingenieros, no lograron dar un nombre a “la nada”. Ellos no contaban “nada”. Los griegos que desarrollaron la lógica y la geometría nunca introdujeron el número cero.

Los calculistas indios lo definieron como el resultado de sustraer cualquier número de sí mismo. Podemos decir que el cero nació en la India. La palabra “cero” proviene de la traducción de su nombre en sánscrito (una lengua clásica de la India) “shunya” que significa vacío. Parece ser que fue Brahmagupta quien trató el cero como un "número", no como un mero marcador de posición, y mostró unas reglas para operar con él.

Se debe tener un especial cuidado el papel que desempeña el cero en la divisibilidad:

$$a * b = 0 \ \rightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$$

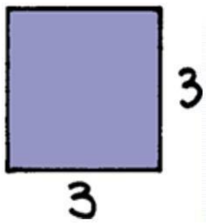
$$\frac{a}{0} = indefinido$$

$$\frac{0}{0} = indeterminado$$

Potenciación

Cuando se multiplica un número natural por sí mismo, por ejemplo 3.3, hay otra manera de expresar ese producto: 3^2 , y se lee "3 al cuadrado" o "3 a la 2". La costumbre de decir "3 al cuadrado" es muy antigua, y la razón por la cual se dice así, tiene que ver con la geometría.

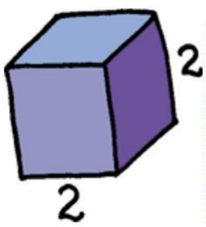
Si se tiene un cuadrado cuyo lado mide 3 unidades, su área es $3*3 = 3^2$



El área de cualquier cuadrado es igual al lado multiplicado por sí mismo, es decir, al cuadrado de la medida de su lado.

En los tiempos de la Grecia Antigua, gran parte de las ideas matemáticas eran estudiadas a través de la Geometría, y por eso, cuando se quería encontrar una representación geométrica de algo tan sencillo como el producto de dos números, digamos 5.6, lo que hacían era dibujar un rectángulo de lados 5 y 6, y así, veían el producto como el área del rectángulo que acababan de dibujar.

También se tiene que 23, que es igual a 2.2.2, se lee: "2 al cubo", y la razón para esto proviene también de la visión que tenían los griegos de la Matemática asociada a la Geometría. Si tenemos un cubo de arista 2:



su volumen es igual a 2.2.2 = 2^3. Es por esto por lo que aún hoy se lee "2 al cubo" o " 2 elevado al cubo".

El proceso de multiplicar a un número por sí mismo una cierta cantidad de veces, se llama potenciación. Sea n un número real y a un entero positivo. Se define la potencia n-ésima de a de la forma:

$$a^n = a * a * a * a \ldots$$

Es decir, es el resultado de multiplicar a consigo mismo n veces. En la expresión a^n, la base es a y el exponente es n.

Consideraciones:

a) Si la base está elevada a exponente par, la potencia es siempre positiva.
b) Si el exponente es impar, la potencia conserva el signo de la base.
c) La potenciación no es una operación distributiva sobre la suma o la resta; es decir, en la potenciación se tiene que:

$$(a \pm b) \neq a^n \pm b^n$$

Propiedades:

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.

EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Simplificar una expresión donde hay exponentes de números reales, significa cambiarla a otra en que cada número real aparece sólo una vez y todos los exponentes son positivos.

Debemos asumir que los denominadores siempre representan números reales diferentes de cero.

$$\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 * \left(\frac{s^2}{r^3}\right)^3 = \frac{(2r^3)^2}{s^2} * \frac{(s^2)^3}{(r^3)^3} = \frac{4r^6}{s^2} * \frac{s^6}{r^9} = 4\frac{r^6}{r^9} * \frac{s^6}{s^2} = 4\frac{1}{r^3}s^4 = \frac{4s^4}{r^3}$$

Radicación

En el campo de la matemática, se conoce como radicación a la operación que consiste en obtener la raíz de una cifra o de un enunciado. De este modo, la radicación es el proceso que, conociendo el índice y el radicando, permite hallar la raíz. Ésta será la cifra que, una vez elevada al índice, dará como resultado el radicando.

Para comprender estos conceptos, por lo tanto, hay que reconocer las partes que forman un radical. La raíz es el número que, multiplicado la cantidad de veces que indica el índice, da como resultado el radicando.

Índice   Raíz

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Radicando

Supongamos que nos encontramos con un radical que muestra la raíz cúbica de 8. Tendremos el radicando (8) y el índice o exponente (3, ya que es una raíz cúbica). A través de la radicación, llegamos a la raíz: 2. Esto quiere decir que 2 elevado al cubo (2 x 2 x 2) es igual a 8.

Como puede advertirse, la radicación es una operación que resulta inversa a la potenciación: retomando el ejemplo anterior, vemos que multiplicando 2 x 2 x 2 (2 elevado al cubo) llegamos a la raíz cúbica de 8.

La radicación es una operación un tanto particular, en cuanto a que no es muy fácil de resolver si no se cuenta con una calculadora o, por el contrario, con habilidades avanzadas para las matemáticas. Mientras que, si vemos una suma, una resta o una multiplicación podemos efectuar en una hoja haciendo uso de técnicas básicas, la

radicación puede dejarnos perplejos dado que a simple vista no parece haber modo de relacionar su radicando con el índice para obtener un resultado.

Como si fuera poco, la manera efectiva de calcular una raíz es a través de las funciones exponencial (la función real que consiste en elevar el número de Euler, 2,71828 aproximadamente, a la x) y logaritmo (se aplica a un número en una base determinada y es el exponente al que se debe elevar la base para dar dicho número), conceptos que la mayoría de la gente no domina y para lo cual es casi indispensable una calculadora o un ordenador.

Consideraciones:

1. Si el radicando es igual a 0, entonces:

$$\sqrt[n]{a} = 0$$

2. Si el radicando es mayor a 0 y el índice impar, la raíz siempre es positiva:

$$\sqrt[3]{64} = 4 \;\; ya\ que\ 4^3 = 64$$

3. Si el radicando es mayor a 0 y e índice es par, la raíz siempre tiene doble signo:

$$\sqrt[4]{16} = \pm 2 \;\; ya\ que\ 2^4 = 16 \;\; y\ (-2^4) = 16$$

4. Si el radicando es menor a 0 y el índice impar, la raíz es siempre negativa:

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \;\; ya\ que\ (-3)^3 = -27$$

5. Si el radicando es menor a 0 y el índice par, la raíz es imaginaria:

$$\sqrt[2]{-36} = no\ tiene\ solución\ en\ R$$

PROPIEDADES DE RAÍCES *n*

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

A veces resulta más cómodo tratar a las raíces como potencias. En este caso, las potencias serán del tipo fraccionarias, y podremos aplicar todas las propiedades de la potenciación vistas anteriormente.

1) El radicando pasa a ser la base de la potencia.
2) El exponente del radicando pasa a ser el numerador de la potencia.
3) El índice pasa a ser el denominador de la potencia.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Racionalización de denominadores

Si bien los radicales siguen las mismas reglas que los enteros, a veces es difícil encontrar el valor de una expresión que contiene radicales. Por ejemplo, probablemente puedas saber qué $\frac{1}{4} = 0{,}25$, pero no conoces el valor de $\frac{1}{\sqrt{4}}$.

Dicho esto, algunas veces tendrás que trabajar con expresiones que contienen muchos radicales. Normalmente el valor de estas expresiones no es claro a simple vista. En casos donde tienes una fracción con un radical en el denominador, puedes usar una técnica llamada racionalización de denominadores para eliminar el radical. El objetivo de racionalizar un denominador es que sea más fácil de entender cuál es el valor de la cantidad al eliminar los radicales de los denominadores (y algunas otras situaciones, que más adelante estaremos viendo).

Caso 1: Racionalizando denominadores con un término

En este caso debemos multiplicar a la fracción por otra cuyo numerador y denominador sean iguales (para no alterar el número) y de valor igual al denominador original.

$$\frac{5}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{5\sqrt{x}}{x}$$

Caso 2: Racionalizando denominadores con dos términos

$$\frac{5}{\sqrt{x}+3} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+3}\frac{(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)} = \frac{5(\sqrt{x}-3)}{x-9}$$

Advertencia: este método sólo aplica cuando los términos incluyan raíces cuadradas.

1.2. POLINOMIOS

En la formulación abstracta de problemas matemáticos se recurre con frecuencia a las llamadas expresiones algebraicas, que no son sino conjuntos de letras y números unidos entre sí por signos aritméticos. Los polinomios son casos especiales de expresiones algebraicas donde las variables o indeterminadas aparecen siempre elevadas a un exponente positivo y entero.

Elementos de un polinomio con una variable

POLINOMIOS

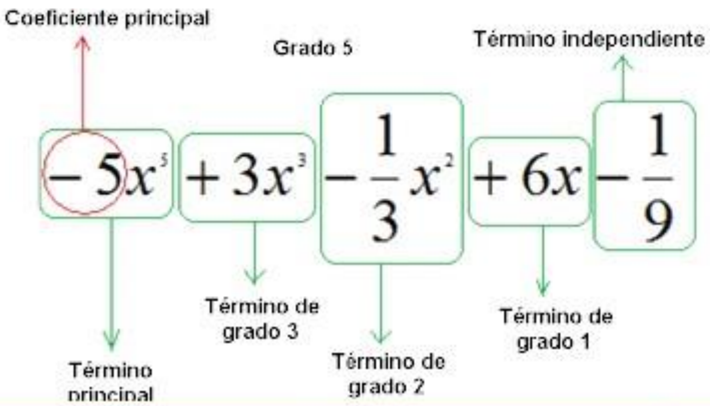
Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado** n. Los monomios a_kx^k que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Los elementos de los polinomios son:

- Los coeficientes (ai) con i = 0, 1, 2, ..., n. El que multiplica a la variable elevada al mayor grado se denomina coeficiente principal (a_n), mientras que el que no contiene variable se llama término independiente (a_0).
- La variable es x.
- Los exponentes son los que se eleva la variable. En un polinomio, los exponentes NO pueden ser negativos.



Ejemplo	Coeficiente principal	Grado
$3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4$	3	4
$x^8 + 9x^2 + (-2)x$	1	8
$-5x^2 + 1$	-5	2
$7x + 2$	7	1
8	8	0

Los polinomios con sólo un término se llaman monomios; con dos, binomios; con tres, trinomios; etcétera. Se conoce por grado de un polinomio el mayor exponente al que se eleva la variable.

1.3. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma y resta

Dos monomios se dicen semejantes cuando tienen la misma variable y el mismo grado. La suma o resta de monomios semejantes produce un nuevo monomio semejante, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los monomios originales.

Análogamente, para sumar o restar polinomios de una misma variable se aplica el siguiente procedimiento:

1. Se ordenan de mayor a menor los términos de ambos polinomios, dejando huecos para los términos ausentes.
2. Se suman o restan los monomios Semejantes. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & x^4 & +0 & -3x^2 & +x & +1 \\
+ & & x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\
\hline
 & x^4 & x^3 & -4x^2 & +6x & -1
\end{array}
$$

Producto

Producto entre monomios

Entre dos monomios de una misma variable puede definirse también la operación producto, que resulta en un nuevo monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuyo grado es la suma de los grados de los dos monomios originales.

CASO 1:

$$
\begin{aligned}
5x^2 \cdot -3x^2 &= (5\cdot -3)\,(x^2 \cdot x^2) \\
&= (-15)\,(x^{2+2}) \\
&= -15)\,x^4
\end{aligned}
$$

CASO 2:

$$
\begin{aligned}
5x^2 \cdot -3y^2 &= (5\cdot -3)\,(x^2 \cdot y^2) \\
&= -15\,x^2\,y^2
\end{aligned}
$$

Producto entre polinomios

De esta forma, el producto de dos polinomios se define como la multiplicación de cada uno de los términos (monomios) del primer polinomio por todos los términos del segundo, sumando

$$(x+2)\cdot(x+2)\cdot(x+2) =$$
$$=(x^2+2x+2x+4)\cdot(x+2)=$$
$$=(x^2+4x+4)\cdot(x+2) =$$
$$=x^3+2x^2+4x^2+8x+4x+8=$$
$$=x^3+6x^2+12x+8$$

y agrupando después los términos resultantes.

Factorización de polinomio

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como producto de nuevas expresiones más simples.

- Factor común: consiste en "sacar" del polinomio aquel factor que esté común en cada uno de los términos.

$$48x^4 + 32x^3 + 36x = 4x * (12x^3 + 8x^2 + 9)$$

- Trinomio cuadrado perfecto - Cuadrado de un binomio: es un caso especial en el que un binomio se multiplica por el mismo binomio.

$$(4x+3) * (4x+3) = (4x+3)^2 = (4x)^2 + 2 * (4x) * (3) + (3)^2 = 16x^2 + 24x + 9$$

$$(4x-3) * (4x-3) = (4x-3)^2 = (4x)^2 + 2 * (4x) * (-3) + (-3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$$

- Diferencia de cuadrados: es otro caso especial en donde se multiplica un binomio por otro, con la diferencia que el segundo término del segundo polinomio tiene signo opuesto.

Fórmula	Ejemplos
(1) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$	$(2a+3)(2a-3) = (2a)^2 - 3^2 = 4a^2 - 9$
(2) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	$(2a-3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + (3)^2 = 4a^2 - 12a + 9$
(3) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$(2a+3)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3)^2 + (3)^3 = 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

$$(4-x)(4+x) = 4 * 4 + 4x - 4x - x * x = 4^2 - x^2$$

Cociente

Cociente entre monomios semejantes

La división o cociente entre dos monomios semejantes es un nuevo monomio cuyo coeficiente es la división entre los coeficientes y cuyo grado es la resta de los grados de los dos monomios originales. El grado del dividendo debe ser mayor o igual que el del divisor.

CASO 1:

$$\frac{15x^2}{5x} = \left(\frac{15}{5}\right)\left(x^{(2-1)}\right) = (3)(x^1) = 3x$$

CASO 2:

$$\frac{15x^2}{5y} = \left(\frac{15}{5}\right)\left(x^2y^{-1}\right) = (3)(x^2y^{-1}) = 3x^2y^{-1} = 3\frac{x^2}{y}$$

Cociente entre un polinomio y un monomio

Si se tiene un polinomio que quiere dividirse por un monomio, debe aplicarse la propiedad distributiva:

$$\frac{(-1)(3x^3-6x^2+4x-1)}{(-1)(-3x)} = \frac{-3x^3+6x^2-4x+1}{3x} = \frac{-3x^3}{3x}+\frac{6x^2}{3x}-\frac{4x}{3x}+\frac{1}{3x} = -x^2+2x-\frac{4}{3}+\frac{1}{3x}$$

Cociente entre dos polinomios

La disposición práctica para efectuar el cociente entre dos polinomios es la que se muestra en el siguiente ejemplo, donde se resuelve el cociente:

Siendo P(x): $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20$ y Q(x): $x^2 + 3x - 2$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^4-2x^3-11x^2+30x-20 & x^2+3x-2 \\ \hline
- & x^4+3x^3-2x^2 & x^2-5x+6 \\ \hline
 & -5x^3-9x^2+30x & \\
- & -5x^3-15x^2+10x & \\ \hline
 & 6x^2+20x-20 & \\
- & 6x^2+18x-12 & \\ \hline
 & 2x-8 &
\end{array}$$

El procedimiento por seguir es el siguiente:

1. El polinomio dividendo debe escribirse ordenado en forma decreciente y completa.
2. Se divide el primer término del polinomio dividendo por el primero del divisor.

3. Se multiplica este resultado por el divisor y se resta del polinomio dividendo.
4. Se bajan los términos necesarios y se repite la operación hasta obtener una expresión de grado menor que el del divisor. Esta última expresión recibe el nombre de resto.

"El grado del polinomio cociente es igual a la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el del polinomio divisor".

EJERCITACIÓN UNIDAD N°1

1. Indicar V o F según corresponda:

 a) Todo número real es racional.

 b) Todo número natural es entero.

 c) Todo entero es racional.

 d) Todo número real es irracional.

2. Resolver:

a) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=$

b) $\left\{-1+\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}-\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=$

c) $\left[\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right]\times\frac{\frac{2}{55}}{\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)}=$

d) $\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)-\frac{2}{\frac{1}{3}}}{\frac{\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{10}}}{-\frac{2}{9}}}=$

e) $\frac{\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)}{\frac{2}{5}}}{\frac{1}{6}\times\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\times 2}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{5}{7}}=$

3. Los resultados indicados a continuación no son verdaderos. Marcar los errores de procedimientos cometidos y hallar el resultado correcto.

a) $2-3\times(4\times 2+8)=-1\times 16=-16$

b) $\frac{-2^2+4^{-1}}{-2^3-2^{-1}}=\frac{4+\frac{1}{4}}{-8-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{17}{4}}{-\frac{17}{2}}=-\frac{1}{2}$

4. Verificar la siguiente igualdad sin utilizar calculadora:

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}\right)^{96}=\left\{\left[\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{9}$$

5. Verificar la validez de las siguientes igualdades. En algunos casos deberá racionalizar numerador y/o denominador.

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{1}{2\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}=3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}=\sqrt{2}$

f) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-2\sqrt{35}$

6. Escribir como radicales los siguientes números.

a) $2^{\frac{1}{2}}=$

b) $5^{0,5}=$

c) $9^{\frac{1}{3}}=$

d) $8^{-\frac{2}{3}}=$

7. Expresar x como potencia fraccionaria.

a) $\frac{1}{\sqrt{x}} =$

b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} =$

c) $\sqrt{x} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[5]{x} =$

d) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}} =$

8. Simplificar si es posible.

a) $\sqrt[4]{3^2} =$

b) $\sqrt[9]{27} =$

c) $\sqrt[5]{1024} =$

d) $\sqrt[8]{5^4} =$

9. Extraer factores del radicando.

a) $\sqrt{8} =$

b) $\sqrt{18} =$

c) $\sqrt{32} =$

d) $\sqrt{36}=$

10. Simplificar las siguientes expresiones.

a) $\left(2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$

b) $\frac{5\times\sqrt[3]{5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\times\sqrt[5]{25}\right)^{\frac{1}{3}}}} =$

c) $\frac{\left(\sqrt{6}\times\sqrt[4]{12}\right)^3}{18^{\frac{1}{2}}} =$

d) $\frac{-100^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{\frac{10}{\sqrt{0{,}001}}}} =$

e) $\frac{\left(2^3\right)^{-2}\times\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}} =$

11. Racionalizar los denominadores en las siguientes expresiones.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}} =$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} =$

c) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} =$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-5}=$

12. Resolver las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

b) $\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b} =$

c) $33\sqrt{18} - 11\sqrt{2} + 2\sqrt{50} =$

d) $\sqrt{9x} - \sqrt{25x} + \sqrt{49x} =$

e) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{16}{27}} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{\frac{2}{125}} =$

f) $\sqrt[4]{2a^2} \times \sqrt[4]{ab} \times \sqrt[4]{2ab} =$

g) $\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - \sqrt{24}\right) + \sqrt{98} =$

h) $\sqrt{m} \times \sqrt[3]{m^2} \times \sqrt[4]{m^3} =$

i) $\sqrt[3]{ab^2} \times \sqrt[5]{a^2} \times b^3=$

j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} =$

13. Determinar cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios. En caso de que lo sean, indicar su grado, coeficiente principal y término independiente.

a) $x^2 - \sqrt{x} + 2$

b) $3x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{x}$

c) $x^3 - 2x^4 + \frac{3}{5}x^5 + 16x$

d) $\frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}x - 1$

14. Dado los siguientes polinomios:

$P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ $R(x) = -2x^3 + 4x - x^4$ $S(x) = 3x^2 - 8x$

Calcular:

a) $(x) + 2 \, . \, R(x) =$

b) $R(x) - S(x) =$

c) $[R(x) - sP(x)] + S(x) =$

d) $P(x) \, . \, 3S(x) =$

RESPUESTAS EJERCITACIÓN UNIDAD N°1

1. a) F b) V c) V d) F

2. a) $-\frac{5}{12}$ b) -3 c) $\frac{1}{35}$ d) $\frac{94}{855}$ e) $-\frac{133}{40}$

3. a)-46 b)$\frac{15}{34}$

4. No cumple igualdad $2^4 \neq 2^3$.

5.

a) Verifica
b) Verifica
c) No verifica
d) Verifica
e) Verifica
f) Verifica

6. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d)$\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}$

7. a) $x^{-\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{1}{6}}$ c) $x^{\frac{31}{30}}$ d) $x^{-\frac{1}{5}}$

8. a) $\sqrt{3}$ b)$\sqrt[2]{3}$ c) 4 d) $\sqrt{5}$

9. a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$ d) 6

10. $a)$ 2 $b)$ $5^{\frac{43}{30}}$ c) $2^{\frac{5}{2}} . 3^{\frac{5}{4}}$ d) $-10^{\frac{1}{6}}$ e) $2^{11} . 3^{\frac{2}{3}}$

11. a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{2\sqrt{5}+10}{-4}$ o $\frac{\sqrt{5}+5}{-2}$ c) $\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$ d) $\frac{2+5\sqrt{2}}{-23}$

12. a) -3$\sqrt{2}$ b) 2$\sqrt{a}$ – 3$\sqrt{b}$ c) 98$\sqrt{2}$ d) 5$\sqrt{x}$ e) -3$\sqrt[3]{2}$ f) $a\sqrt{2b}$ g) 4$\sqrt{2}$ h) $m^{\frac{23}{12}}$ i) $a^{\frac{11}{15}} . b^{\frac{11}{3}}$ j) $2^{-\frac{1}{6}}$

13. a) No es polinomio. b) No es polinomio. c) Polinomio, Grado=5, CP= $\frac{3}{5}$, TI=0 d) Polinomio, Grado=3, CP= $\frac{2}{5}$, TI= -1.

14.

a) $-2\,x^4 + 2x^2 + 3x + 3$ b) $-x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x$ c) $-x^4 - 6x^3 + x^2 + x - 3$

d) $36\,x^5 - 78\,x^4 - 93x^3 + 147\,x^2 - 72\,x$

UNIDAD N° 2: ECUACIONES E INECUACIONES

2.1. ECUACIONES

Una igualdad es una relación de equivalencia entre dos expresiones, numéricas o literales, que se cumple para algún, algunos o todos los valores y se representa por el signo =. Cada una de las expresiones recibe el nombre de miembro. Se llama primer miembro a lo que está a la izquierda del signo igual y segundo miembro a lo que está a su derecha.

EXPRESIÓN A = EXPRESIÓN B

Las ecuaciones son igualdades que se verifican para algunos valores determinados y desconocidos de las letras, llamadas incógnitas.

Resolver una ecuación es hallar el conjunto solución. Se conocen como raíces o soluciones de la ecuación a los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución como, por ejemplo $2x - 3 = 5$ y $2x = 8$ su solución es $x = 4$.

Para resolver una ecuación, se transforma ésta en una ecuación equivalente con la variable despejada.

Propiedades

a) Si se suma una misma cantidad a cada lado de la ecuación dada, la igualdad no se altera.
b) Si se resta una misma cantidad a cada miembro de la ecuación dada, la igualdad no se altera.
c) Si se multiplica o se divide a ambos lados de la ecuación por cualquier cantidad diferente de cero, la igualdad no se altera.

Ecuación lineal

La expresión $x - 1 = 7$ es una ecuación, es decir, una igualdad que se cumple para un valor de x. El lado izquierdo de la igualdad se denomina primer miembro de la ecuación y el derecho, segundo miembro.

En la igualdad hay números conocidos (−1 y 7) y otros que no lo son (x). Éstos, son los términos de la ecuación: x es la incógnita, puesto que es el número que se debe hallar, y −1 y 7 son términos independientes, porque no están asociados a ninguna incógnita.

Las ecuaciones en las que la incógnita está elevada a la potencia 1 se denominan lineales o de primer grado.

Volviendo al ejemplo, lo que está preguntando la ecuación es: ¿qué número da 7 si se le resta 1? La respuesta casi inmediata es 8. Se puede comprobar si dicho número cumple la igualdad sustituyendo en la ecuación x por 8, y efectivamente es la solución, puesto que la igualdad se cumple.

Habitualmente, las ecuaciones no son tan sencillas, en el sentido que no siempre es tan fácil deducir su solución. Para resolver ecuaciones hay un método bastante efectivo que se resume en los siguientes puntos:

1. Agrupar los términos con incógnita a un lado de la igualdad, normalmente el primer miembro, y los independientes al otro.
2. Operar siempre que sea posible para simplificar la expresión. Esto implica quitar paréntesis y denominadores si los hubiera.
3. Despejar la incógnita.

Para pasar elementos de un lado a otro de la igualdad hay que tener en cuenta que:

1. Si están sumando o restando pasan al otro lado con el signo contrario.
2. Si están multiplicando pasan dividiendo y viceversa, pero el signo no se modifica al
3. Cambiar de lado.

Problemas con ecuaciones lineales

Aprenderemos a plantear problemas que se resuelvan a partir de una ecuación dada. Por ejemplo, la ecuación $x + 14 = 3x$ tiene como solución $x = 7$.

Partiendo de estas premisas se puede plantear un problema real que se resuelva mediante la ecuación descrita. Un recurso sencillo es plantear un enunciado sobre números, "traduciendo" a palabras lo que implica la ecuación en sí, es decir: "Si a un número se le suma 14 se obtiene el triple de dicho número. ¿De qué número se trata?"

Si se denomina x al número, el triple será $3x$, con lo que ya se puede plantear y resolver la ecuación mencionada. Este mismo tipo de problema se podría plantear con objetos reales, como monedas, caramelos, etc.

2.2. DESIGUALDADES

La expresión a ≠ b significa que " a " no es igual a " b". Una desigualdad se obtiene al escribir dos expresiones numéricas o algebraicas relacionadas con alguno de los símbolos >, <, ≥ o ≤.

Según los valores particulares de a y de b, puede tenerse a > b, que se lee “a mayor que”, cuando la diferencia a - b es positiva y a < b que se lee “a menor que b”, cuando la diferencia a - b es negativa.

La notación a ≥ b, que se lee “a es mayor o igual que b”, significa que a > b o que a = b pero no ambos. Por su parte, la notación a ≤ b que se lee “a es menor o igual que b”, significa que a < b o que a = b, pero no ambos.

Lo mismo que en las igualdades, en toda desigualdad, los términos que están a la izquierda del signo mayor o menor forman el primer miembro de la desigualdad, y los términos de la derecha, forman el segundo miembro.

De la definición de desigualdad, se deduce que:

- Todo número positivo es mayor que cero.
- Todo número negativo es menor que cero.
- Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- Si a > b entonces b < a.

Los signos > o < determinan dos sentidos opuestos en las desigualdades, dependiendo si el primer miembro es mayor o menor que el segundo. Se dice que una desigualdad cambia de sentido, cuando el miembro mayor se convierte en menor o viceversa.

Existen dos clases de desigualdades: las absolutas y las condicionales o inecuaciones, en este curso nos centraremos en la segunda clasificación.

Desigualdades lineales o Inecuaciones

Una desigualdad condicional o inecuación es aquella que sólo se verifica para ciertos valores de las partes literales. Por ejemplo: $3x - 15 > 0$ que solamente satisface para todos los valores de $x > 5$. En este caso se dice que 5 es el límite de x.

Debido a que la parte literal se encuentra elevado al exponente 1 se consideran lineales.

Propiedades

Sean a, b, c tres números reales:

a) Una desigualdad no cambia de sentido cuando se añade o se resta un mismo número a cada miembro. Esto es, si $a > b$, entonces se cumple que $a + c > b + c$.

b) Una desigualdad no cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor positivo, o se dividen por un mismo divisor, también positivo. Esto es, dado un número $c > 0$, si $a > b$ entonces se cumple que $a * c > b * c$ y que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

c) Una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor negativo, o se dividen por un mismo divisor, también negativo. Esto es, dado un número $c < 0$, si $a > b$ entonces se cumple que $a * b < b * c$ y que $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Método para graficar

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de valores de x que cumplan la desigualdad. Gráficamente, la solución de una inecuación de primer grado está representada por un intervalo del eje de las abscisas a partir de un valor límite a. Si la solución es de la forma $x > a$, entonces la región será todos los números que estén a la derecha de a sin incluirlo. Si la solución es de la forma $x \geq a$, la región incluye al valor a. De la misma forma, si la solución es de la forma $x < a$, entonces la región será todos los números que estén a la izquierda de a sin incluirlo. Si la solución es de la forma $x \leq a$, la región incluye al valor a. Dependiendo del tipo de desigualdad el conjunto solución puede ser uno o dos intervalos, la totalidad de los números reales o el conjunto vacío.

INTERVALO	GRÁFICO	SIGNIFICADO Y NOMENCLATURA
ABIERTO	a b	$a < x < b$ $]a, b[$
ABIERTO POR LA IZQUIERDA	a b	$a < x \leq b$ $]a, b]$
ABIERTO POR LA DERECHA	a b	$a \leq x < b$ $[a, b[$
CERRADO	a b	$a \leq x \leq b$ $[a, b]$
INFINITO POR LA IZQUIERDA Y ABIERTO	a	$x < a$ $]-\infty, a[$
INFINITO POR LA DERECHA Y ABIERTO	a	$x > a$ $]a, +\infty[$
INFINITO POR LA IZQUIERDA Y CERRADO	a	$x \leq a$ $]-\infty, a]$
INFINITO POR LA DERECHA Y CERRADO	a	$x \geq a$ $[a, +\infty[$

2.3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (S.E.L.)

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado, en el cual se relacionan dos o más incógnitas.

$$2x + 3y = 2$$

$$2x - 2y = 12$$

En los sistemas de ecuaciones, se debe buscar los valores de las incógnitas, con los cuales, al reemplazar, deben dar la solución planteada en ambas ecuaciones. A cada una de las ecuaciones se les denomina también restricciones o condiciones. Las incógnitas establecidas en un sistema representan el punto donde se interceptan las rectas en un plano cartesiano (x,y).

Métodos de resolución algebraica de S.E.L.

Reducción

Consiste en igualar los coeficientes de una misma incógnita en ambas ecuaciones y, enseguida, sumar o restar las ecuaciones, de modo que se eliminen los términos cuyos coeficientes se igualaron. Ejemplo:

$$3x - 2y = 7$$

$$2x + y = 14$$

En primer lugar, se iguala una de las incógnitas del sistema. En este caso, se empieza igualando la incógnita y. Para ello, se multiplica la segunda ecuación por 2, quedando $4x + 2y = 28$.

$$3x - 2y = 7$$

$$4x + 2y = 28$$

Ahora, se suma o resta (según se requiera) los términos semejantes, para reducir (eliminar) el término con coeficiente común.

$$3x - 2y = 7$$

$$\underline{4x + 2y = 28}$$

$$7x + 0y = 35$$

Luego, se resuelve la ecuación, quedando así $x = 5$, ya que:

$$7x = 35$$

$$x = \frac{35}{7}$$

$$x = 5$$

Ya se conoce el valor de una de las incógnitas. Para identificar el otro valor, se debe reemplazar en una de las ecuaciones el valor que se obtuvo de x. en este caso:

$$\boldsymbol{3x - 2y = 7}$$

$$3 * 5 - 2y = 7$$

$$-2y = 7 - 15$$

$$y = \frac{-8}{-2}$$

$$y = 4$$

Por lo tanto, la solución al sistema de ecuaciones es → S: (5, 4)

Sustitución

Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en otra ecuación. Ejemplo:

$$10x + 15y = 410$$

$$x + y = 34$$

Primero, se despeja cualquiera de las incógnitas de esta ecuación. Por ejemplo, se escoge despejar x en la segunda ecuación. Para ello, se mueven todos los términos que no sean x hacia el otro lado de la igualdad.

$$y = 34 - x$$

Conociendo el valor de x, se sustituye en la otra ecuación:

$$10x + 15 * (34 - x) = 410$$

$$10x + 510 - 15x = 410$$

$$510 - 410 = 5x$$

$$\frac{100}{5} = x$$

$$20 = x$$

Una vez que se conoce el valor de la otra incógnita (en este caso, y), se sustituye en la ecuación:

$$y = 34 - x$$

$$y = 34 - 20$$

$$y = 14$$

Por lo tanto, la Solución al sistema de ecuaciones es → S: (20,14)

Igualación

Consiste en despejar la misma variable de ambas ecuaciones del sistema. Una vez despejada, se igualan los resultados, despejando la única variable que queda.

$$2x + y = 50$$

$$4x - y = 30$$

Se debe despejar cualquiera de las incógnitas de la ecuación. En este caso, se opta por despejar y.

$$y = 50 - 2x$$

$$y = \frac{30 - 4x}{-5}$$

Se igualan las expresiones obtenidas: $y = y$

$$(-5) * (50 - 2x) = 30 - 4x$$

$$10x - 250 = 30 - 4x$$

Ahora, se resuelve la ecuación resultante, que tiene una incógnita:

$$14x = 280$$

$$x = \frac{280}{14}$$

$$x = 20$$

Una vez identificado el valor de "x", se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$2x + y = 50$$

$$y = 50 - 2 * 20$$

$$y = 50 - 40$$

$$y = 10$$

Por lo tanto, la Solución al sistema de ecuaciones es → S: (20,10)

Resolución de problemas con S.E.L.

Para resolver problemas en los que se plantee un sistema de ecuaciones, se debe seguir estos pasos:

- Leer atentamente el enunciado, e identificar las incógnitas.
- Traducir el enunciado en varias ecuaciones.
- Resolver el sistema e interpretar la solución. Ejemplo:

La suma de la edad de dos niños es 4 años. Si la edad del primero sumada al triple de la edad del segundo es 10 años. ¿Qué edad tiene cada niño?

Pasos:

1. Leer atentamente el enunciado, e identificar las incógnitas. → Números pedidos, x e y.
2. Traducir el enunciado en varias ecuaciones.

   La suma de la edad de dos niños es 4 años → $x + y = 4$

   La edad del primero sumada al triple de la edad del segundo es 10 años → $x + 3y = 10$
3. Resolver el sistema e interpretar la solución.

$$x + y = 4$$
$$x + 3y = 10$$

Se utiliza el método de reducción. Respuesta: Las edades son: 1 y 3 años.

EJERCITACIÓN UNIDAD N°2

Ecuaciones lineales

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3 = \frac{1}{2}$

b) $2 - 2(x + 3) = \frac{1}{2}(4x + 2)$

c) $\sqrt{(x - 2)} = 4$

d) $\frac{4x-6}{12} - \frac{3x-8}{4} = \frac{2x-9}{6} - \frac{x-4}{8}$

e) $\frac{2-(1-x)}{3} - x = 1 - \frac{2}{3}x$

f) $2\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{5}{2}x}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}}x$

g) $3x + 2 - 2(2x - 3) = x - 2$

h) $\frac{(6x-13+3x)}{2} = -38$

i) $\frac{x}{9} + \frac{14}{2} + 5 = \frac{10}{2} + 8$

j) $\frac{2x+9}{5} = x + 3$

k) $\frac{x}{3} = 2(x - 5)$

l) $\frac{x+38}{5} = \frac{6+9x}{3}$

m) $\frac{2x+4-5x+3}{4} - \frac{7x-9+3x-8}{7} + 2 = 4x$

n) $\frac{7}{9}(x - 2) + \frac{5}{6}(x - 4) = 20 - \frac{7}{3}(x - 7)$

o) $21x + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}x + 9\right) - \frac{9}{4} = 24x + 3$

Problemas de ecuaciones lineales

2. Carmen tiene 16 años y sus dos hermanos pequeños tienen 2 y 3 años. ¿Cuántos años han de pasar para que el doble de la suma de las edades de los hermanos de Carmen sea la misma que la que tiene ella?

3. Dado un número, la suma de su mitad, su doble y su triple es 55. ¿Qué número es?

4. Hace 5 años la edad de Ernesto era el triple que la de su primo Juan, que tiene 15 años. ¿Cuántos años han de pasar para que Juan tenga la edad actual de Ernesto?

5. Tenemos tres peceras y 56 peces. Los tamaños de las peceras son pequeño, mediano y grande, siendo la pequeña la mitad de la mediana y la grande el doble. Como no tenemos ninguna preferencia en cuanto al reparto de los peces, decidimos que en cada una de ellas haya una cantidad de peces proporcional al tamaño de cada pecera. ¿Cuántos peces pondremos en cada pecera?

6. Juan tiene 400 euros y Rosa tiene 350. Ambos se compran el mismo libro. Después de la compra, a Rosa le quedan cinco sextas partes del dinero que le queda a Juan. Calcular el precio del libro.

7. Un estudiante en un curso de álgebra tiene calificaciones de examen de 75, 82, 71 y 84. ¿Qué calificación en el siguiente examen subirá el promedio del estudiante a 80?

8. Una pareja no desea gastar más de \$70 por comer en un restaurante. Si se agrega un impuesto de venta de 6% a la cuenta y piensan dar una propina de 15% después de agregar el impuesto, ¿cuánto es lo más que pueden gastar por la comida?

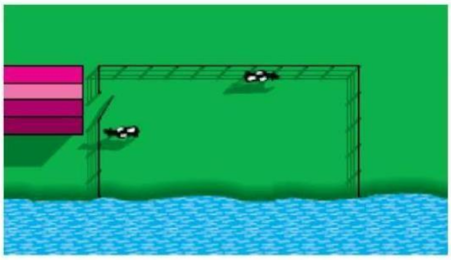
9. El sueldo base por hora de un trabajador es \$10, pero él recibe una y media veces su sueldo por cualesquiera horas trabajadas de más de 40 por semana. Si su cheque de salario para la semana es \$595, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?

10. Un agricultor piensa usar 180 pies de cerca para encerrar una región rectangular, usando parte de una margen recta de un río en lugar de cerca como uno de los lados del rectángulo, como se ve en la figura. Encuentre el área de la región si la longitud del lado paralelo a la margen mide:

a) El doble de la longitud de un lado adyacente.

b) La mitad de la longitud de un lado adyacente.

c) Igual que la longitud de un lado adyacente.



Inecuaciones

1. Resolver y graficar las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2}{3}x > 7$

b) $2x + \frac{1}{3} \geq 2$

c) $-2 - x < \frac{1}{2}$

d) $5(2 - 3x) > 3(2 - 3x)$

e) $10x - 4(x + 1) \geq 13 + 3x$

f) $3(2x - 3) \geq 2(x + 5) - 1$

g) $3 - (x - 6) \leq 4x - 5$

h) $x + \frac{3}{2} > \frac{x}{2} - 1$

i) $\frac{5x-6}{2} > x + 2$

j) $x + \frac{3}{4} < \frac{5x-2}{3} + 1$

k) $1 + \frac{x+3}{5} \geq 1 - x$

l) $1 - \frac{x-3}{2} \geq \frac{x}{2} + 5$

Problemas de inecuaciones

2. El largo de un rectángulo es de 4 cm más que el ancho.

a) Si el perímetro del rectángulo es mayor que 100cm, determine la variación del ancho del rectángulo.

b) Si el perímetro del rectángulo se encuentra entre 150cm y 300cm, determine la variación del ancho del rectángulo.

3. Un furgón pesa 875 Kg. La diferencia entre el peso del furgón vacío y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 Kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales de idéntico peso, ¿Cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en ese furgón?

Sistemas de ecuaciones lineales

4. Resolver los sistemas de ecuaciones lineales que se presentan a continuación:

a) $\begin{cases} 2x + y = -10 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6r - 5t = -11 \\ 7t - 8r = 15 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8p - 3q = 8 \\ 2p + 9q = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2m - 5n = 14 \\ 5m + 2n = -23 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 2y = -3 \\ 7y - 12x = 17 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x - y = 75 \\ 5x - 2y = 42 \end{cases}$

Problemas de sistemas de ecuaciones lineales

5. La otra tarde vi en un parking 39 vehículos, entre coches y motos, a los que les conté un total de 126 ruedas. ¿Cuántos vehículos de cada clase había en el parking?

6. Vicente se gasta 2000 pesos en un pantalón y una camisa. No sabe el precio de cada prenda, pero si sabe que la camisa vale dos quintas partes de lo que vale el pantalón. ¿Cuánto vale el pantalón?

7. Seiscientas personas asistieron al estreno de una película. Los boletos para adultos costaron $9 y la admisión de niños $6. Si los recibos de la taquilla totalizaron $4800, ¿Cuántos niños asistieron al estreno?

8. En el aula de 3º A hay doble números de alumnos que en el aula de 3ºC. Además, se sabe que, si se pasan 8 alumnos de 3ºA a 3º C, ambas aulas tendrán el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada una de estas aulas?

9. En una prueba de elección múltiple, se puntúa 4 por cada respuesta correcta y se resta un punto por una equivocada. Un estudiante responde a 17 cuestiones y obtiene 43 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

10. Hace 5 años, la edad de Sonia era el triple que la de Roberto, y dentro de 10 años será doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

RESPUESTAS EJERCITACIÓN UNIDAD N°2

Ecuaciones lineales

1. a) $\frac{7}{4}$
   b) $-\frac{5}{4}$
   c) 18
   d) 4
   e) Indeterminado
   f) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
   g) 5
   h) -7
   i) 9
   j) -2
   k) 6
   l) 2
   m) 1
   n) $\frac{742}{71}$
   o) 8

Problemas de ecuaciones lineales

2. Deberán pasar 2 años.
3. El número es 10.
4. Para que Juan tenga la edad actual de Ernesto deberán pasar 20 años.
5. Pondremos 8 peces en la pequeña, 16 en la mediana y 32 en la grande.
6. El previo del libro es de 100 €.
7. Deberá sacar un 88 para que su promedio sea 80.
8. El gasto en comida deberá ser $57,42 como máximo.
9. El trabajador hace 13 horas extras.
10. A= 4050 $pies^2$ b) A=2592 $pies^2$ c) A= 3600 $pies^2$.

Inecuaciones

1. a) $x > \frac{21}{2}$ b) $x \geq \frac{5}{6}$ c) $x > -\frac{5}{2}$ d) $x < \frac{2}{3}$ e) $x \geq \frac{17}{3}$ f) $x \geq \frac{9}{2}$ g) $x \geq \frac{14}{5}$ h) $x > -5$
   i) $x > \frac{10}{3}$ j) $x > \frac{5}{8}$ k) $x > -\frac{1}{2}$ l) $x \leq -\frac{5}{2}$
2. a) ancho > 23 b) $\frac{71}{2} < ancho < 73$
3. Cómo máximo cada cajón debe pesar 115 kg.
4. a) $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$ S= $(-4; -2)$
   b) $\begin{cases} m = -3 \\ n = -4 \end{cases}$ S= $(-3; -4)$
   c) $\begin{cases} r = -1 \\ t = 1 \end{cases}$ S= $(-1; 1)$

d) $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 3 \end{cases}$ S= $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$

f) $\begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases}$ S= $(12; 9)$

e) $\begin{cases} p = \frac{3}{2} \\ q = \frac{4}{3} \end{cases}$ S= $\left(\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$

5. 24 autos y 15 motos.

6. La camisa cuesta $571,43 y el pantalón $1428,57.

7. Asistieron al estreno 200 niños y 400 adultos.

8. En 3º C hay 16 alumnos y en 3º A hay 32 alumnos.

9. Respondió correctamente 12 cuestiones y 5 no.

10. Sonia tiene 50 años y Roberto tiene 20 años.

UNIDAD 3: INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DISCRETA.

Esta unidad tiene como objetivo como bien indica su nombre realizar una breve pero eficaz introducción a la matemática discreta. Para eso es necesario explicar que queremos decir cuando nombramos “matemática discreta”.

La esencia del mundo discreto son las magnitudes contables, es decir aquellas cosas que poseen una “unidad mínima” a modo de bloques con los cuales se pueden construir las demás operaciones y números. Un ejemplo de un conjunto discreto son los números Naturales: 1;2;3;4;… pues entre el 1 y el 2 no existe valor intermedio.

Estudiar este tipo de operaciones discretas es muy útil en el mundo de los algoritmos y sistemas computacionales. A lo largo de esta unidad nos centraremos en una rama principal de las matemáticas discretas, como es la lógica y sus operaciones principales.

LÓGICA MATEMÁTICA.

La lógica matemática se encarga de estudiar la inferencia y veracidad de enunciados que se puedan escribir con símbolos matemáticos unidos por distintas operaciones formales lógicas, llegando a demostrar nuevos enunciados.

Para estos casos nos centraremos partiendo por hipótesis que los enunciados o proposiciones son o bien **verdaderas** o **falsas**.

Ejemplos de estos tipos de enunciados pueden ser:

“Hoy es lunes”

“$2 + 3 = 8$”

“$si\ x = 3, entonces\ x^2 = 9$”

Notemos que estos enunciados, a pesar de ser muy sencillos y obvios de verificar su veracidad, lo importante es el carácter binario de los mismos, es decir, sólo pueden ser verdaderos o falsos, no admiten dualidad.

Ejemplos de enunciados que no son considerados proposiciones lógicas pueden ser los siguientes:

“¡Ojalá no llueva hoy!”

“$x > 0\ y\ x < 1$”

Como vemos estas frases no pueden considerarse proposiciones lógicas, debido a que no es posible demostrar su veracidad mediante la información que ella misma contiene, por ejemplo, en la segunda frase de dice que un número “x” es mayor que cero y que a su vez es menor que 1, pero al no definir un valor de “x” **NO** es posible inferir la naturaleza de verdad del enunciado.

Al momento de enunciar una proposición lógica, es útil entender los conectores u operadores lógicos que actúan en la misma. Para eso nos centraremos en los conectores más comunes o fundamentales, estos son:

Los conectores “**y**”, “**o**”, “**implica**”, “**sí y sólo sí**”, “**no**”.

Aunque estos conectores son relativamente sencillos de comprender, no bien mal hacer un par de aclaraciones respecto a cada uno de ellos.

Comprendiendo El Conector Lógico “Y”.

Considérese la proposición siguiente:

“Hoy es lunes y llueve”

Esta proposición es compuesta de dos proposiciones más pequeñas (la primera es “Hoy es lunes”, la segunda es “llueve”) por medio de un conector lógico (“y”).

A estas proposiciones que NO se pueden dividir o comprender como una composición de enunciados, las llamamos “proposiciones simples”.

Volviendo a nuestro ejemplo, podemos definir cada proposición simple mediante una letra sin perder la lógica de la frase:

p= “Hoy es lunes”   q= “llueve”

Quedándonos el enunciado de la siguiente forma:

“p y q”

Esta proposición como es una proposición lógica se le puede asignar un valor de verdad. Analicemos cuando es verdadera.

Para entender si es verdad trabajemos sobre el enunciado original, luego extenderemos este formalismo a sus símbolos.

“Hoy es lunes y llueve” como vemos, para considerar esta proposición como verdadera, se necesita que sean verdaderas sus proposiciones simples, es decir, será verdadera sólo cuando efectivamente hoy sea lunes y este lloviendo.

Si hoy es lunes pero no llueve, entonces es falsa, si hoy llueve pero no es lunes, entonces es falsa… por último si No es lunes y No está lloviendo también es falsa.

En este sentido, para que proposiciones conectadas con el conector “y” sea considerada verdadera es necesario que ambas proposiciones lo sean.

Esta información se puede resumir en la siguiente tabla de verdad:

P	Q	P ^ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esta tabla condensa como funciona el conector “y” que también se puede escribir utilizando el símbolo “^”.

Comprendiendo El Conector Lógico “O”.

Otra manera de conectar dos proposiciones simples es mediante el conector lógico “o”. Para eso es necesario definir a que hacemos referencia cuando unimos dos proposiciones con tal conector.

En el lenguaje cotidiano decir cosas como “vos sos loco o te haces” implica que o bien “sos loco” o bien “te haces” en el sentido cotidiano esta “o” hace referencia a elegir sólo UNA de las proposiciones… en cambio, en lógica matemática, el conector “o” es una “o inclusiva” lo que implica la posibilidad de que ambas cosas sucedan… en el lenguaje del día a día, sería como decir “vos sos loco o te haces o ambos” es en este sentido que el conector lógico “o” se diferencia del “o” cotidiano.

Analicemos el siguiente enunciado:

“soy inteligente o tu eres fuerte”

Podemos dividir este enunciado en dos proposiciones simples:

“soy inteligente”=p “tu eres fuerte”=q unidos por el conector “o”

p o q también se puede simbolizar como p v o

Si ahora estamos interesados en ver la “veracidad del enunciado” hemos de notar que para que la proposición sea verdadera puede darse cuando, yo sea inteligente, cuando tu seas fuerte o cuando ambas sean verdad, sólo será falsa cuando yo NO sea inteligente y tu NO seas fuerte.

De aquí podemos extraer el comportamiento para el conector “o” en la siguiente tabla de verdad:

P	Q	P v Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Comprendiendo El Conector Lógico “Implica”.

A partir de dos proposiciones p y q formamos la nueva proposición “p implica q”. Se puede emplear con el mismo sentido: “si p entonces q”.

Este conector es el más complicado de los cinco. En efecto, la implicación matemática tiene un sentido bien diferente de la implicación del lenguaje ordinario. El valor de verdad de la implicación p implica q se define así: la implicación es falsa solamente cuando la hipótesis p es cierta mientras que la conclusión q es falsa. En los otros casos, la implicación es cierta. En particular:

Si la hipótesis p es falsa, entonces la implicación es cierta, independientemente del valor de q.

Si la conclusión q es cierta, entonces la implicación es cierta, independientemente del valor de p.

Su tabla de verdad nos quedaría así:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V

F	F	V

Comprendiendo El Conector Lógico “Si Y Sólo Si”

En este caso, es fácil entender el conector, dadas dos proposiciones, p y q, vemos que para que se cumpla p, es necesario que se cumpla q, lo mismo en el otro sentido. Entonces la proposición p si y solo si q, es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Como ejemplo, analicemos este enunciado:

“Una persona es mayor de edad si y solo si posee legalmente el carné de conductor”

Una aclaración, es que cuando se analiza el valor de verdad de un enunciado, siempre se recurre a la información que contiene el mismo contiene… NO confundir con el criterio personal que uno pueda tener con respecto a la proposición. En este es conveniente entender que la “verdad” matemática, es comparable a decir si un enunciado es “coherente” consigo mismo.

Al analizar este enunciado, vemos que si una persona es mayor de edad y posee carné de conducir entonces la frase es coherente, cumple con lo que dice, con lo que se propone. Si una persona NO es mayor de edad, pero posee carné de conducir entonces este caso va en contra de lo que se enuncia, por eso es considerado “falso”.

Comprendiendo El Conector Lógico “No”

A partir de una proposición p formamos una nueva proposición: “no p”.

La proposición “no p” es verdadera cuando p es falsa, y falsa cuando p es verdadera. La tabla de verdad de la negación es:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Hasta aquí hemos desarrollado los conectores lógicos elementales, al igual que cuando uno aprende las operaciones aritméticas básicas luego se lanza al mundo de las operaciones combinadas, en lógica sucede del mismo modo. A continuación, comprenderemos que pasa cuando unimos más de un conector lógico en una proposición.

Los Paréntesis

Trabajemos con las siguientes tres proposiciones simples:

p= hoy es lunes

q= el cielo está despejado

r= hoy no hay luna llena

Ahora combinemos estas proposiciones de las siguientes maneras:

$$p \vee (q \rightarrow \neg r)$$

$$(p \vee q) \rightarrow \neg r$$

La primera se lee: “Hoy es lunes o si el cielo está despejado entonces hoy hay luna llena”

La segunda se lee: “Si hoy es lunes o el cielo está despejado entonces hoy hay luna llena”

Como vemos los paréntesis son fundamentales a la hora de formular proposiciones y en el orden que los escribimos alterarán los enunciados de significados distintos.

Tomemos de ejemplo la segunda proposición y analicemos sus valores de verdad

$(p \vee q) \rightarrow \neg r$

P	Q	R	P v Q	¬R	(P v Q)→¬R
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V

Se pide al estudiante que analice con cuidado la tabla de verdad, puede ser engorrosa, pero se aplican todas las definiciones anteriormente dadas.

Estudiemos otro ejemplo:

“p o ((no p) y q)” en símbolos p v (¬p ^ q)

Si analizamos su valor de verdad mediante una tabla de verdad

P	Q	¬P	¬P ^ Q	P v (¬P ^ Q)
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

EJERCITACIÓN UNIDAD N°3

1- Indica cuales de los siguientes enunciados son proposiciones.

a) La tierra es un satélite.
b) ¿Quieres ser mi compañera de viaje?
c) ¡Ayúdame!
d) x + y= z
e) Más vale pájaro en mano que cien volando.
f) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2- Escriba en forma simbólica los siguientes enunciados

a) Si las exportaciones disminuyen entonces bajarán las utilidades
b) Los precios son altos si y sólo sí los costos aumentan
c) Si la producción aumenta entonces bajarán los precios
d) Si aumenta la demanda esto implica que aumenta la oferta y viceversa
e) Si la contaminación aumenta entonces existirá restricción vehicular adicional.

3- Pía dice: "Corro o no gano la maratón." Esto equivale a decir:
a) Si corro, gano la maratón
b) Si no corro, gano la maratón
c) Si corro, no gano la maratón
d) Si corro, gano la maratón
e) Gano la maratón o no corro

4- Sean p y q dos proposiciones distintas, si (p v q) es falsa entonces
a) p es verdadera y q es falsa
b) p es verdadera y q es verdadera
c) p es falsa y q es falsa
d) p es falsa y q es verdadera
e) Ninguna de las anteriores

5- Si la proposición p es verdadera (V) y la proposición q es verdadera (V). De las expresiones siguientes cuál (es) es(son) correcta(s):
a) $p \Rightarrow q = V$
b) $p \wedge q = F$
c) $p \vee q = F$
d) $\sim p \wedge q = V$

6- Cuál de las siguientes expresiones son lógicamente equivalentes a $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$
a) $p \Rightarrow (\sim q \wedge r)$
b) $(p \Rightarrow q) \wedge r$
c) $(p \Rightarrow \sim q) \wedge r$
d) $p \Rightarrow (q \vee r)$

7- Construir las tablas de verdad de y verificar cuales de ellas son tautologías.
a) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p \Rightarrow \sim q)]$
c) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

8- Demuestre por medio de tablas de verdad si las siguientes proposiciones son Tautología (T) Contingencia (k) o Contradicción (C)

a) [(p ⇒ q) ∧ ~p] ⇒~q
b) [(p v q) r] ⇔ [(~p ⇔ ~q) v ~r]
c) ~ {[~p ∧ (~q v p)] ⇒ q}
d) [(a v b) ∧ (a v c)] ⇔ [a v (b ∧ c)]
e) [(a ⇒ b) ∧ (b ⇒c)] ⇔ (a ⇒ c)
f) [(p ∧ ~q) v (p ∧ r)] ⇒ (q ∧ r) es la negación de: ~ (p ⇒ q)

9) Confecciona la tabla de verdad de los siguientes esquemas. Clasifícalas
a) (p v q) ⇒ (p v q)
b) (p ∧ q) ⇒ (~p v q)
c) (p ⇒ q) ∧ (~q ⇒ ~p)
d) (~p v q) ⇔ (~q ⇒ ~p)
e) [(p v q) ∧ q] v ~q
f) [(p v q) ∧ q] ∧ ~q

RESPUESTAS EJERCITACIÓN UNIDAD N°3

1- Indica cuales de los siguientes enunciados son proposiciones.

a) Si.
b) No.
c) No.
d) No.
e) Si.
f) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2-

a) Si las exportaciones disminuyen entonces bajarán las utilidades
P→Q
b) Los precios son altos si y sólo si los costos aumentan
R↔S
c) Si la producción aumenta entonces bajarán los precios
T→U
d) Si aumenta la demanda esto implica que aumenta la oferta y viceversa
(V→W) ∧ (W→V)
e) Si la contaminación aumenta entonces existirá restricción vehicular adicional
X→Y

5-
a) Correcta /Incorrecta
b) Correcta /Incorrecta
c) Correcta /Incorrecta
d) Correcta /Incorrecta

9-
a) Tautología
b) Tautología
c) Contingencia
d) Tautología
e) Tautología
f) Contradicción.